6,7 - дәріс

Кешенді сандар ұғымы. Оларға амалдар қолдану. Алгебралық, тригонометриялық, көрсеткіштік формалары. Қисықтар мен облыстардың түрін анықтау.

1. **Кешенді айнымалы функциясының атқаратын қызметінің элементтері.**

1.1 Кешенді санның ұйғарымдары

Ұйғарым 1. *Кешенді сан* деп тең ақиқаттық сандар тағайындалған тәртіппен аталады $z = (x; y)$. *X* және *y* сандары ақиқаттық немесе жалған деп аталып, z кешенді санының бөліктерімен көрсетіледі *x=Re(z), y=Im(z).*

Ақиқаттық сандар кешенді санның бір бөлігі болып табылады, сондай-ақ *(x;0)= x* – заттай сан, *(0;y)=y* – таза жалған сан, *(0;1)=i – жалған бірлік*. Тағы кешенді санның мысалдары: $0 = (0;0),\ -1 = (-1;0),\ -i = (0;-1)$.

Кешенді сандарды кешенді жазықтықта нүктелермен бейнелеуге болады. Тәжірибеде келесі ұйғарымды пайдалану ыңғайлы.

Ұйғарым 2. *Кешенді сан* z деп көріністің ұғымы аталады: $z = x + iy = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z).$

Мұндай жазба кешенді санның *алгебралық пішіні* деп аталады.

Кешенді сан $\overline{z} = x - i \cdot y$ - кешенді санға *түйіндес* деп аталады $z = x + i \cdot y$.

1.2 Кешенді сандармен әрекеттер

1) *Теңдік*. Екі кешенді сан тең, егер оның ақиқаттық және жалған бөліктері тең болса. Берілгені: $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$. Егер $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$.

Салыстыру операциясы $z_1 > z_2$ $(z_1 < z_2)$ *анықталмаған*. Кешенді санның көпшілігі – реттеулі емес көпшілік.

2) *Сома (айырым).* $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$,

$$(z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)).$$

3) *Туынды.* $z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)$.

Көбейту және бөлу операциялары ақиқаттық сандармен әрекеттеседі. сонымен қатар, $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$.

4) *Меншікті* $\frac{z_1}{z_2}$ кешенді санды бөлу z_1 ден $z_2 \neq 0$ кешенді санға, кешенді сан деп аталады $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2}$ немесе алгебралық пішінде

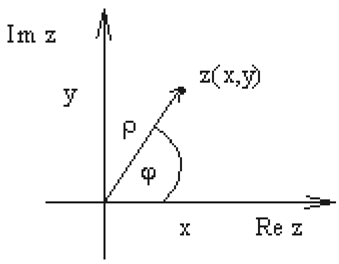
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

$\operatorname{Re} z$ Ақиқаттық бөлік және z кешенді санының жалған бөлігі $\operatorname{Im} z$ келесі бейне арқылы түйіндес кешенді сандарды білдіреді:

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = i\frac{\overline{z} - z}{2} = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

1.3 Кешенді санды геометриялық талғап-талдап түсіндіру

Кешенді сан $z = (x; y) = x + i \cdot y$ нүкте M(x, y) мен XOY кешенді жазықтығында бейнеленеді. 1 суретте ол $z = (x; y)$, немесе вектормен $\vec{\rho}$.



Әрбір кешенді сан модульмен немесе дәлелмен анықталады:

$\rho = |\overrightarrow{OM}| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – кешенді санның модулі,

$\varphi = \operatorname{Arg} z$ – кешенді санның аргументі. Сурет 1

Кешенді санның аргументі көп мағынаны білдіреді $Arg\ z = \arg z + 2\pi k \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$, кешенді санның ақиқат немесе жалған бөлігіне байланысты ,зависящих от действительной и мнимой частей комплексного числа, $\arg z$ қайда болса сонда *бастым* мағына $\operatorname{Arg} z$ бар, шартпен анықталатын $-\pi < \arg z \leq \pi$, содан:

$$\arg z = \begin{cases} arctg \dfrac{y}{x}, & \text{åñëè} \quad x > 0, \\ arctg \dfrac{y}{x} + \pi, & \text{åñëè} \quad x < 0, \quad y > 0, \\ arctg \dfrac{y}{x} - \pi, & \text{åñëè} \quad x < 0, \quad y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{åñëè} \quad x = 0, \quad y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{åñëè} \quad x = 0, \quad y < 0 \end{cases}$$

Нүктенің ең оңай көпшіліктерін кешенді жазықтықта қараймыз.

А) $|z - z_0| = a \ (a > 0)$ - шеңбер орталықпен z_0 нүктесінде a радиусында;

б) $|z - z_0| < a \ (a > 0)$ - ашық ауқым орталықпен z_0 нүктесінде a радиусында;

в) $|z - z_0| > a \ (a > 0)$- сыртқы ашық ауқым орталықпен z_0 нүктесінде a радиусында;

г) $a < |z - z_0| < b \ (0 < a < b)$ - ашық шығыршық орталықпен z_0 нүктесінде;

д) $\arg (z - z_0) = \varphi$ - сәуле, бас z_0 нүктесінде, □□бұрышпен ақиқаттық кіндіктің салмақты бағытына қарай;

е) $\alpha < \arg (z - z_0) < \beta$ - тежеусіз ашық сектордың іші жоғарғы нүктеде z_0 және бұрышпен $\beta - \alpha$;

ж) $\operatorname{Re} z = a$ - түзу, || жалған кіндік, $(a;0)$ нүкте арқылы өтетін;

з) $\operatorname{Im} z = b$ -түзу, || ақиқаттық кіндік, $(0;b)$ нүкте арқылы өтетін.

1.4 Тригонометриялық және үлгілі кешенді санның жазбасының пішіндері.

Кез келген комплексті сан $z = x + i \cdot y \quad (z \neq 0)$ тригонометриялық формада жазуға болады $z = \rho \cdot (cos \ \varphi + i \sin \ \varphi)$

немесе көрнекті формада $z = \rho \cdot e^{i \cdot \varphi}, \quad \rho = |z|, \ \varphi = Arg \ z$.

Комплексті сандар мейлі z_1 және z_2 тригонометриялық формада берілсін:

$$z_1 = \rho_1 \cdot (\cos \ \varphi_1 + i \sin \ \varphi_1), \qquad z_2 = \rho_2 \cdot (\cos \ \varphi_2 + i \sin \ \varphi_2),$$

Комплексті сандар шығармасы осы формула бойынша болады

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (\cos \ (\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin \ (\varphi_1 + \varphi_2)),$$

Яғни $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad Arg \ (z_1 \cdot z_2) = Arg \ z_1 + Arg \ z_2 .$

Екі комплексті сандардың бөліндісі z_1 және $z_2 \neq 0$ осы формула бойынша болады $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$

яғни

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad Arg\,\frac{z_1}{z_2} = Arg\,z_1 - Arg\,z_2 .$$

комплексті санды тұрғызу $z = \rho \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ натуралды сатыға n формуласымен туындайды

$$z^n = \rho^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

онда

$$|z^n| = |z|^n, \qquad Arg\,z^n = n \cdot \grave{a}rg\,z + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Осыдан Муавр формуласы

$$(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi .$$

z-тің комплексті санынан *n* дәрежесінің түбірі бойынша болатын әртүрлі мәндердің n алады

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \ \varphi = \arg z, \ k = 0,1,\ldots,n-1 .$$